MODEL BLACK–SCHOLES

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{rT}\Phi(d_2)$$

RUDY C. TARUMINGKENG

Oleh:
Prof Ir Rudy C Tarumingkeng, PhD
Professor of Management, NUP: 9903252922
Rector, Cenderawasih State University (1978-1988)
Rector, Krida Wacana Christian University (1991-2000)

rudyct75@gmail.com
Bogor, Indonesia
9 May, 2025

Model Black–Scholes

1. Latar Belakang dan Pengembang

Model Black–Scholes dikembangkan pertama kali oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973, kemudian diperluas oleh Robert Merton hingga dikenal sebagai Black–Scholes–Merton model. Tujuan awalnya adalah memberikan kerangka matematis untuk menilai opsi Eropa (hanya dapat dilaksanakan pada tanggal jatuh tempo), khususnya pada saham tanpa dividen. Untuk temuan ini, Scholes dan Merton dianugerahi Nobel Ekonomi pada tahun 1997 (Black sudah meninggal pada 1995) (Wikipedia, Investopedia).

2. Asumsi Dasar Model

Model ini dibangun atas beberapa asumsi kunci:

- Pergerakan harga saham mengikuti proses Brownian motion dengan drift konstan dan volatilitas konstan.
- Tidak ada biaya transaksi atau pajak; pasar bersifat efisien (tidak memungkinkan arbitrase).
- Suku bunga bebas risiko (risk-free rate) konstan dan sama untuk seluruh horizon waktu.
- Tidak ada pembayaran dividen (asli untuk opsi saham tanpa dividen) (Investopedia, Real-Time Financial Data API | Intrinio).

3. Formula Inti Black–Scholes

Harga opsi call Eropa C pada waktu t diberikan oleh:

$$C = S\,\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

dengan

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/K) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

di mana $\Phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif Normal standar, S harga saham saat ini, K strike price, r suku bunga bebas risiko, σ volatilitas, dan T waktu hingga jatuh tempo (dalam tahun) Wikipedia .

4. Interpretasi Variabel

- **\$S\$ (Underlying Price):** Harga terkini saham atau aset dasar.
- **\$K\$ (Strike Price):** Harga eksekusi opsi.
- **\$\sigma\$ (Volatilitas):** Standar deviasi log-return saham; mengukur risiko.
- **\$r\$ (Risk-free Rate):** Suku bunga obligasi pemerintah jangka pendek.
- **\$T\$ (Time to Maturity):** Jangka waktu hingga opsi jatuh tempo dalam tahun.
- **\$\Phi(d_1)\$ dan \$\Phi(d_2)\$:** Probabilitas terdiskonto dan disesuaikan risiko bahwa opsi akan berakhir in-the-money (Investopedia, The Economic Times).

5. Contoh Numerik

Misalkan sebuah opsi call Eropa pada saham ABC memiliki:

- \$S = 100\$, \$K = 95\$, \$r = 5%\$, \$\sigma = 20%\$, \$T = 0{,}5\$ tahun. Maka

$$d_1 = \frac{\ln(100/95) + (0{,}05 + 0{,}5 \times 0{,}2^2) \times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} \approx 0{,}897,$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}2\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}750.$$

Dengan $\Phi(0{,}897)\approx0{,}815$ dan $\Phi(0{,}750)\approx0{,}773$, diperoleh:

$$C = 100 \times 0{,}815 - 95 \times e^{-0{,}05\times0{,}5} \times 0{,}773 \approx 81{,}5 - 73{,}4 = 8{,}1.$$

Artinya, premi opsi call wajar sekitar 8,1 unit mata uang (SoFi, The Economic Times).

6. "Greeks" dan Sensitivitas
Model ini juga memungkinkan perhitungan sensitivitas harga opsi terhadap parameter (Greeks):

- **Delta (Δ)**: ∂C/∂S = $\Phi(d_1)$, mengukur perubahan harga opsi per unit perubahan harga saham.
- **Vega**: ∂C/∂σ, sensitivitas terhadap volatilitas.
- **Theta**: ∂C/∂T, laju "time decay".
- **Rho**: ∂C/∂r, sensitivitas terhadap suku bunga.
  Penghitungan Greeks penting bagi strategi hedging dan manajemen risiko (Columbia University, Investopedia).

7. Keterbatasan dan Diskusi
Meskipun revolusioner, model ini memiliki keterbatasan:

- **Volatilitas Konstan:** Faktanya volatilitas bersifat variabel (volatility smile/skew).
- **Tidak Memasukkan Dividen**: Belum cocok untuk saham yang membayar dividen tanpa penyesuaian (model Merton memperbaiki ini).
- **Opsi Amerika:** Model Eropa tidak memperhitungkan hak eksekusi lebih awal pada opsi Amerika.
- **Biaya Transaksi dan Pajak:** Asumsi pasar friksionless seringkali tidak realistis.

Oleh karena itu, praktiknya pedagang menggunakan implied volatility surface dan model binomial atau Monte Carlo untuk menangani beberapa keterbatasan di atas (Investopedia, Real-Time Financial Data API | Intrinio).

8. Perluasan Model
Robert Merton (1973) memperluas untuk memasukkan dividen kontinu, sehingga harga saham diasumsikan membayar yield konstan q, dan menyesuaikan komponen diskonto pada $S e^{-qT}$ dalam formula (Wikipedia).

9. Implikasi Praktis
Bagi manajer risiko dan trader opsi, model Black–Scholes tetap menjadi alat fundamental untuk:

- Menetapkan harga wajar opsi.
- Merancang strategi hedging delta-neutral.
- Mengidentifikasi mispricing relatif di pasar.

Namun, kesadaran akan asumsi yang mendasari dan koreksi praktis (surface volatility, binomial lattice) sangat penting untuk menghindari kerugian akibat penyimpangan pasar nyata.

Dengan narasi ini, diharapkan Anda memahami tidak hanya rumus dan implementasi numerik Black–Scholes, tetapi juga konteks historis, asumsi dasar, kekuatan, keterbatasan, serta pertimbangan praktis dalam penggunaan sehari-hari.

10. Volatilitas Implied dan Fenomena "Smile"
Dalam praktik pasar, volatilitas σ tidak dapat diukur secara pasti—sehingga digunakan "implied volatility" (IV), yaitu nilai σ yang membuat harga opsi model Black–Scholes sama dengan harga pasar. Jika kita plot IV untuk berbagai strike price pada satu tenor, sering muncul pola "smile" (smile/skew): volatilitas lebih tinggi di strike jauh

ITM (in-the-money) maupun OTM (out-of-the-money) daripada at-the-money. Fenomena ini mencerminkan kenyataan bahwa distribusi return saham tidak sepenuhnya log-normal—terdapat ekor tebal (fat tails) dan skewness. Diskusi tentang smile menggugah perkembangan model volatilitas lokal (Dupire), stochastic volatility (misalnya Heston), dan mixed models untuk menangkap dinamika pasar nyata.

11. Derivasi PDE dan Pendekatan Feynman–Kac
Secara matematis, harga opsi $C(S,t)$ dapat diperoleh bukan hanya lewat hedging portofolio, tetapi juga melalui persamaan diferensial parsial (PDE) Black–Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0$$

dengan kondisi batas $C(S,T)=\max(S-K,0)$. Persamaan ini berasal dari argumen portofolio bebas risiko (delta-hedged) dan dapat diselesaikan menggunakan transformasi matematis. Alternatifnya, pendekatan probabilistik melalui teorema Feynman–Kac menginterpretasikan harga opsi sebagai ekspektasi terdiskonto di bawah risk–neutral measure:

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\max(S_T - K, 0) \mid S_t = S\big].$$

Kedua pendekatan—PDE dan ekspektasi stokastik—memberikan landasan teoritik kuat bagi penilaian instrumen derivatif.

12. Metode Numerik: Binomial dan Monte Carlo
Walau formula analitik Black–Scholes efisien, ada situasi di mana formula tertutup tidak berlaku (opsi Amerika, dividen diskret, barrier option, dll.). Maka digunakan:

- **Model Binomial (Cox-Ross-Rubinstein)**: Diskretisasi waktu menjadi banyak langkah kecil. Pada setiap node, harga naik/turun dengan probabilitas risk-neutral, lalu backward induction untuk menilai opsi. Model ini mudah diimplementasikan, fleksibel untuk berbagai jenis opsi, dan konvergen ke Black–Scholes saat langkah → ∞.

- **Simulasi Monte Carlo**: Mensimulasikan ribuan jalur harga saham menurut risk-neutral dynamics, kemudian menghitung rata-rata pay-off terdiskonto. Cocok untuk opsi eksotis dengan pay-off kompleks, namun memerlukan variance reduction techniques (antithetic variates, control variates) agar hasil lebih akurat.

13. Studi Kasus: Valuasi Opsi Saham Perusahaan Tekno
Misal sebuah perusahaan teknologi Indonesia, "TechNusa", akan menerbitkan opsi karyawan (ESOP) dengan strike Rp 5.000, berlaku 3 tahun. Data historis return TechNusa menunjukkan volatilitas historis sekitar 30 % per tahun, risk-free rate obligasi pemerintah 10 tahun saat ini 7 % per tahun, dan perusahaan tidak membayar dividen. Dengan Black–Scholes, manajer kompensasi dapat menentukan premi opsi karyawan (fair value) untuk laporan keuangan; sekaligus memperkirakan "expensed cost" yang akan dibukukan tiap periode. Diskusi kritis: ESOP berbeda karena karyawan cenderung memegang opsi hingga dekat expiry, sehingga volatilitas riil dan perilaku exercise bisa menyimpang dari asumsi model — memerlukan penyesuaian menggunakan model binomial dengan ekspektasi exercise rasional.

14. Kritik Akademik dan Implikasi Manajemen Risiko
Secara akademik, beberapa kritik muncul:

- *Asumsi Pasar Efisien*: Tidak mempertimbangkan anomali pasar (momentum effect, mean reversion).
- *Parameter Konstan*: Tidak ada adaptasi terhadap perubahan volatilitas atau suku bunga.
- *Risk–Neutral Valuation*: Mengabaikan preferensi risiko investor nyata; konteks hedging di pasar incomplete dapat memerlukan risk premium tambahan.
  Manajer risiko korporat harus sadar bahwa walau Black–Scholes menyediakan kerangka dasar, sensitifitas harga opsi terhadap parameter (Greeks) berubah jika asumsi dilanggar. Mispricing

akibat model yang terlalu sederhana dapat memicu kerugian substansial—terutama dalam market stress scenarios.

15. Perkembangan Terkini dan Literasi Lanjutan

Dalam dekade terakhir, penelitian terus berkembang:

- **Rough Volatility Models** (Gatheral et al.) menangkap behavior volatilitas empiris dengan fractional Brownian motion.
- **Machine Learning** dipakai untuk calibration surface implied volatility dan hedging strategies adaptif.
- **Model Multi-Asset** untuk valuasi opsi basket dan exotics yang menggabungkan dependency structure (copula, correlation dynamics).

Diskusi Akhir

Model Black–Scholes tetap landmark dalam teori keuangan modern: menyatukan probabilitas stokastik, PDE, dan prinsip hedging menjadi satu kerangka. Namun, transformasi pasar, volatilitas dinamis, dan instrumen derivatif baru menuntut adaptasi dan model lebih kompleks. Sebagai pengajar atau manajer risiko, pendekatan terbaik adalah memahami teori dasar Black–Scholes sekaligus keterbatasannya, menggunakan model alternatif atau hybrid sesuai konteks, dan selalu melakukan back-testing serta stress-testing asumsi untuk memastikan robustness strategi derivatif.

Thought for 5 seconds

16. Kalibrasi dan Estimasi Parameter

Selain memperkirakan volatilitas historis, praktisi juga melakukan kalibrasi model dengan **implied volatility surface**. Proses ini melibatkan:

1. **Pengumpulan Data Harga Opsi:** Mengambil harga pasar berbagai opsi dengan strike dan tenor berbeda.
2. **Optimasi Volatilitas:** Menentukan volatilitas σ pada setiap kombinasi strike–tenor sehingga harga model cocok (minimisasi squared error).
3. **Interpolasi/Extrapolasi Surface:** Membentuk continuous surface IV(K,T) yang dapat digunakan untuk pricing opsi lainnya. Kalibrasi yang baik krusial agar model mencerminkan ekspektasi pasar saat ini, terutama di lingkungan volatilitas tinggi atau stress market.

17. Ekstensi Model: Jump–Diffusion dan Local Volatility
Untuk mengatasi keterbatasan log-normal process, beberapa ekstensi klasik muncul:

- **Jump–Diffusion (Merton, 1976):** Menambahkan komponen loncatan (jump) Poisson pada dinamika harga, sehingga return memiliki distribusi ekor tebal. Luas digunakan untuk valuasi opsi pada saham yang rawan berita mendadak atau crash.
- **Local Volatility (Dupire, 1994):** Mengasumsikan volatilitas sebagai fungsi deterministik dari harga saham dan waktu, $\sigma=\sigma_{\mathrm{loc}}(S,t)$, yang diekstrak langsung dari implied volatility surface. Model ini konsisten dengan smile/skew yang diamati.

18. Aplikasi pada Real Options dan Manajemen Korporat
Konsep Black–Scholes tak hanya untuk financial derivatives, tetapi juga merambah ke **real options** dalam corporate finance, di antaranya:

- **Opsi Eksipansi (Expansion Option):** Hak perusahaan untuk memperbesar kapasitas pabrik jika permintaan naik.
- **Opsi Abandon (Abandonment Option):** Kemampuan menghentikan proyek jika keuntungan jatuh di bawah biaya operasi.
  Penilaian real options yang memanfaatkan framework Black–

Scholes mendorong keputusan investasi lebih fleksibel, mengakui "opsionalitas" dalam GUI (Growth, Uncertainty, Irreversibility).

19. Peran dalam Regulasi dan Risk Management
Banyak lembaga keuangan dan korporasi menggunakan Black–Scholes sebagai dasar perhitungan **Value-at-Risk (VaR)** dan stress testing dalam kerangka Basel III. Dengan Greeks—khususnya delta dan vega—risk manager dapat:

- **Hedging Dinamis:** Menyesuaikan portofolio derivatif secara real-time untuk tetap delta-neutral.
- **Capital Allocation:** Menentukan modal ekonomi yang diperlukan untuk menutup potensi kerugian opsi pada level confidence tertentu.

Dengan tambahan di atas, Anda mendapatkan gambaran lebih lengkap tentang proses kalibrasi, berbagai ekstensi model untuk menangkap fitur return riil, aplikasi di luar financial options seperti real options, serta bagaimana Black–Scholes mendasari praktik manajemen risiko dan regulasi modern. Jika masih ada aspek spesifik—misalnya implementasi kode numerik, studi kasus historis krisis opsi, atau pembahasan empiris pada pasar Indonesia—silakan diinformasikan untuk pendalaman lebih lanjut.

Catatan Penutup

Secara keseluruhan, model Black–Scholes–Merton telah merevolusi cara kita menilai dan mengelola instrumen derivatif, dengan menyediakan kerangka matematis yang terintegrasi antara teori probabilitas stokastik, persamaan diferensial parsial, dan prinsip arbitrase bebas risiko. Meskipun asumsi-asumsinya—seperti volatilitas konstan, pasar friksionless, dan tidak adanya dividen—sering diperdebatkan, komponen inti model ini (Greeks, risk–neutral valuation, dan formula tertutup) tetap menjadi fondasi dasar bagi penelitian lanjutan dan praktik trading modern.

Selanjutnya, perluasan model melalui jump–diffusion, local volatility, rough volatility, serta adopsi metode numerik (binomial, Monte Carlo) dan teknik kalibrasi implied volatility surface, menunjukkan fleksibilitas kerangka ini dalam menangkap kompleksitas pasar nyata. Di ranah korporasi, penerapan konsep real options memperkaya pengambilan keputusan investasi dengan mengakui nilai opsionalitas keputusan manajerial. Di sisi regulasi dan manajemen risiko, Black–Scholes mendasari perhitungan Value-at-Risk dan praktik hedging dinamis, memperkuat efektivitas kerangka Basel III dalam menjaga stabilitas keuangan.

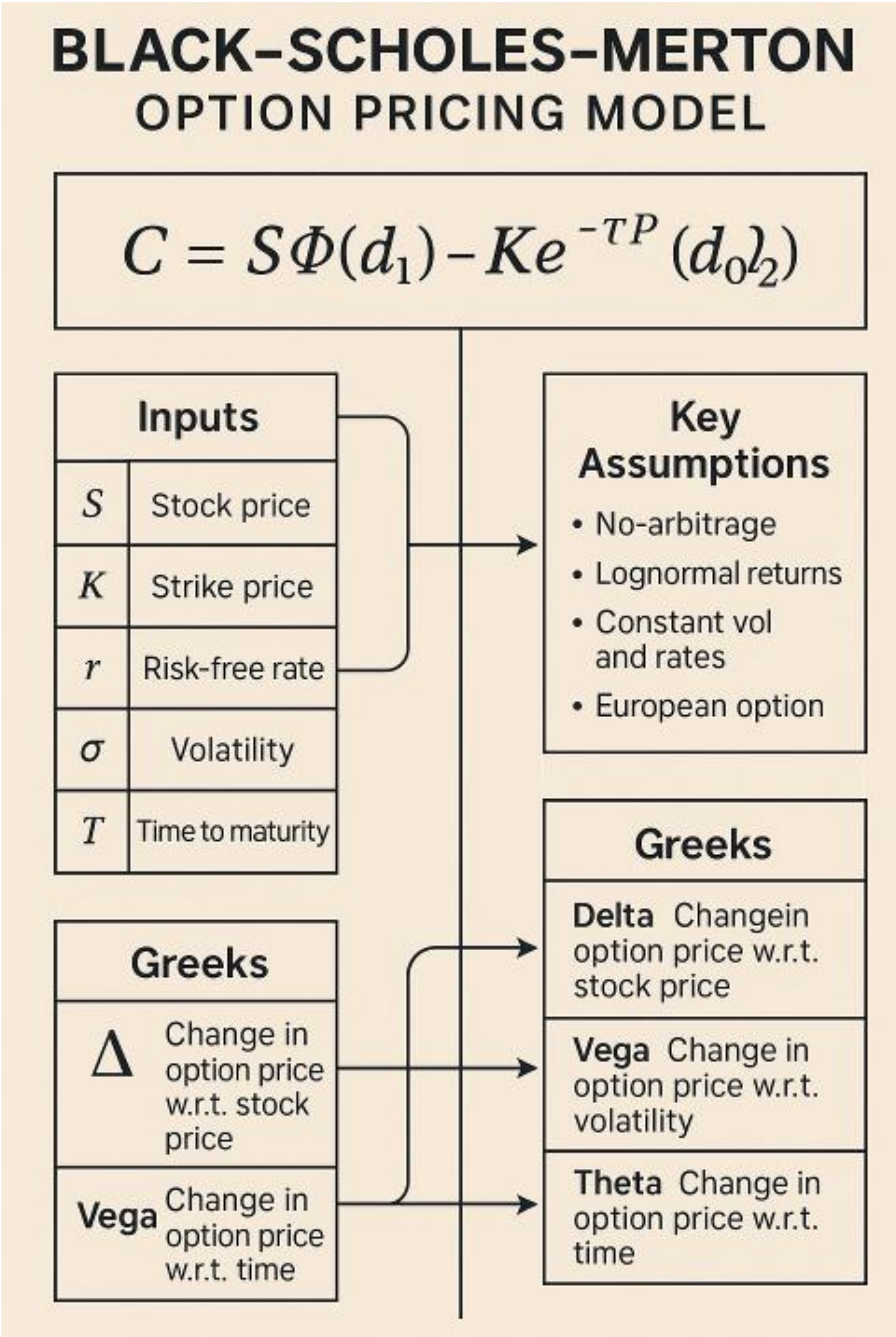
Sebagai penutup, pemahaman mendalam tentang teori dasar Black–Scholes beserta keterbatasannya adalah kunci bagi akademisi, praktisi, dan pengambil kebijakan. Rekomendasi ke depan mencakup:

1. **Penelitian Empiris Lokal:** Menelaah perilaku implied volatility pada pasar Indonesia untuk menguji relevansi fenomena smile/skew di bursa domestik.
2. **Pengembangan Model Hybrid:** Menggabungkan pendekatan machine learning dengan rough volatility untuk kalibrasi lebih adaptif di lingkungan volatilitas tinggi.
3. **Integrasi Real Options dalam Strategi Korporasi:** Mengembangkan toolkit praktis bagi manajer proyek untuk menilai opsi ekspansi, penundaan, atau penghentian proyek dengan lebih sistematis.

Dengan demikian, meski evolusi pasar dan instrumen terus berlangsung, model Black–Scholes akan terus menjadi tolok ukur utama—baik sebagai objek kritik akademik maupun sebagai pijakan praktis dalam manajemen risiko dan strategi keuangan.

Infografik

Berikut infografik yang merangkum Model Black–Scholes–Merton, mencakup formula utama, asumsi dasar, input variabel, dan sensitivitas harga opsi (Greeks).



Glosarium

Istilah	Definisi
Model Black–Scholes	Kerangka matematis untuk menilai opsi Eropa, mengasumsikan pergerakan harga mengikuti Brownian motion dengan volatilitas dan suku bunga konstan.
Opsi Eropa (European Option)	Kontrak derivatif yang memberi hak (tapi bukan kewajiban) untuk membeli (call) atau menjual (put) aset dasar pada harga tertentu hanya pada tanggal jatuh tempo.
Aset Dasar (Underlying Asset)	Instrumen finansial (misalnya saham) yang menjadi acuan nilai opsi.
Harga Strike (Strike Price)	Harga eksekusi opsi, yaitu harga di mana pemegang opsi dapat membeli atau menjual aset dasar saat jatuh tempo.
Volatilitas (σ)	Standar deviasi log-return aset dasar; ukuran risiko dan ketidakpastian pergerakan harga.
Suku Bunga Bebas Risiko (r)	Tingkat imbal hasil obligasi pemerintah jangka pendek yang diasumsikan konstan dalam model.
Waktu hingga Jatuh Tempo (T)	Jangka waktu (dalam tahun) dari nilai saat ini hingga opsi dapat dilaksanakan.
Payoff Opsi (Payoff)	Nilai yang diperoleh pemegang opsi saat jatuh tempo, yaitu max(S–K, 0) untuk call dan max(K–S, 0) untuk put.
Delta (Δ)	Sensitivitas harga opsi terhadap perubahan kecil harga aset dasar: $\Delta = \partial C/\partial S$.

Istilah	**Definisi**
Vega	Sensitivitas harga opsi terhadap perubahan volatilitas: $\partial C/\partial \sigma$.
Theta (Θ)	Laju penurunan nilai opsi seiring berjalannya waktu ("time decay"): $\partial C/\partial t$.
Rho (ρ)	Sensitivitas harga opsi terhadap perubahan suku bunga bebas risiko: $\partial C/\partial r$.
Implied Volatility	Nilai volatilitas yang disesuaikan sehingga harga model Black–Scholes sama dengan harga pasar opsi.
Volatility Smile/Skew	Pola implied volatility yang lebih tinggi pada strike jauh ITM atau OTM ketimbang ATM, mencerminkan distribusi return dengan ekor tebal atau skewness.
Jump–Diffusion	Model dinamis harga yang menambahkan komponen loncatan (jump) Poisson untuk menangkap peristiwa harga ekstrem secara tiba-tiba.
Local Volatility	Ekstensi model di mana volatilitas σ adalah fungsi deterministik dari harga dan waktu, $\sigma_{\rm loc}(S,t)$, yang diestimasi dari implied volatility surface.
Real Options	Aplikasi konsep opsi pada keputusan investasi riil (misalnya ekspansi atau penghentian proyek), menghargai fleksibilitas manajerial di tengah ketidakpastian pasar.
Risk-Neutral Measure (Q)	Pendekatan valuasi yang menganggap ekspektasi return aset dasar sama dengan suku bunga bebas risiko, sehingga harga opsi dapat dihitung sebagai ekspektasi terdiskonto payoff di bawah distribusi Q.

Istilah	Definisi
Model Binomial	Metode numerik diskret untuk menilai opsi dengan backward induction pada pohon harga yang membagi periode menjadi langkah-langkah kecil.
Simulasi Monte Carlo	Teknik numerik yang mensimulasikan banyak jalur harga stokastik untuk menghitung rata-rata payoff terdiskonto, cocok untuk opsi kompleks dan eksotis.

Semoga glosarium ini membantu memahami istilah-istilah kunci dalam teori dan praktik model Black–Scholes–Merton.

Daftar Pustaka

1. Black, F., & Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81(3), 637–654.
2. Merton, R. C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1), 141–183.
3. Merton, R. C. (1976). *Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous*. Journal of Financial Economics, 3(1–2), 125–144.
4. Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, 7(3), 229–263.
5. Dupire, B. (1994). *Pricing with a Smile*. Risk Magazine, 7(1), 18–20.
6. Heston, S. L. (1993). *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. The Review of Financial Studies, 6(2), 327–343.
7. Gatheral, J. (2018). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Wiley.
8. Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9th ed.). Pearson.
9. Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.
10. Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press.
11. ChatGPT o4-mini (2025). Access date: 9 May 2025. Prompting by Rudy C Tarumingkeng on Writer’s account. https://chatgpt.com/c/681d4b43-f72c-8013-b723-f032aa152903